Ж.Н у р п е й с о в

К ГЕОМЕТРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

Всякое скалярное поле, отличное от постоянной, определяет на римановом n-многообразии интегрируемое $(n-1)$-распределение и ряд 1-распределений. В статье изложены результаты по геометрии этих распределений.

1. Пусть V_n -риманово пространство. В пространстве V_n определено поле симметрического тензора g_{ij} такого, что квадратичная форма $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$ положительно определена в любой точке $x \in V_n$, где $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, а $R^x = \{X_i\}$ - репер, взаимный кореперу $\theta_x = \{\omega^k\}$, $\left(X_i = \alpha_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$.

Как известно [3], на римановом пространстве V_n $\nabla g_{ij} = 0$, т.е. $dg_{ij} = g_{ik}\omega_j^k + g_{kj}\omega_i^k$,
где $\omega = (\omega_j^i)$ -форма связности ∇, $\omega_j^i = \gamma_{jk}^i \omega^k$ $(i,j,k = 1,\dots,n)$, а γ_{ij}^k -коэффициенты связности ∇ в корепере θ_x.

Пусть в области $\Omega \subset V_n$ задана вещественнозначная гладкая функция $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Тогда ковектор $df = f_{,i}\omega^i$ определяет на V_n $(n-1)$-мерное распределение $\Delta'_{n-1} = \Delta(Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1})$, где $f_{,i}$ -пфаффова производная от f по ω^i, а

$$Z_{,a} = f_{,a}^i X_i, \quad f_{,a}^i = \begin{vmatrix} f_{,1} & f_{,a+1} \\ \delta_1^i & \delta_{a+1}^i \end{vmatrix} \quad (a,b,c = 1,\dots,n-1).$$

На V_n возникает 1-распределение $\Delta'_1 = \Delta(y)$, такое, что площадки $\Delta'_{n-1}(x) \subset \Delta_{n-1}$ переносятся параллельно вдоль интегральных кривых распределения $\Delta'_1 : \nabla_y u \in \Delta'_{n-1}, \forall u \in \Delta'_{n-1}$. В общем случае $y \notin \Delta'_{n-1}$ и 1-распределение $\Delta(y)$ находится как и в работе [4].

2. В пространстве V_n существует 1-распределение $\Delta(X)$, ортогональное распределению Δ'_{n-1}. Пусть $X = \xi^i X_i$, тогда $\langle X, Z_a \rangle = 0$; $a = 1,2,\dots,n-1$ или

$$\xi^i \begin{vmatrix} f_{,1} & f_{,a+1} \\ g_{1i} & g_{a+1i} \end{vmatrix} = \xi^i f_{,a}^j g_{ij} = 0 \qquad (1)$$

Система уравнений (1) состоит из $(n-1)$ уравнений относительно n неизвестных ξ^i. Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных через G:
$G = \| f_{,a}^j g_{ij} \|$. Так как $\operatorname{rang} \| f_{,a}^j g_{ij} \| = n-1$, то обозначая через G_k минор $(n-1)$-го порядка, получающийся после вычеркивания из матрицы G k-го столбца, получим решение системы (1) в виде: $\xi^i = (-1)^{i-1} G_i$ (по i не суммировать).

Рассмотрим адаптированный репер R^x такой, что $\Delta_{n-1} = \Delta(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$; тогда ортогональное направление $\Delta(X)$ находится из системы уравнений: $g_{ai}\xi^i = 0$, решая которую получим:

$$\xi^1 : \xi^2 : \dots : \xi^n = \tilde{g}_{ai_1} : (-1)\tilde{g}_{ai_2} : \dots : (-1)^{n-1}\tilde{g}_{ai_n},$$

где $\tilde{g}_{ai_k}$ -минор $(n-1)$-го порядка, получающийся после вычеркивания k-го столбца из матрицы $\|g_{ai}\|$, $i_k \neq k$, $i_k, k = 1,2,\dots,n$.

Таким образом, в римановом пространстве V_n имеем двумерное распределение $\Delta_2 = \Delta(X, Y)$, где $X \perp \Delta_{n-1}$, а вдоль интегральных кривых 1-распределения $\Delta(Y)$ имеем параллельное перенесение площадок $\Delta_{n-1}(x)$, Δ_2 и Δ_{n-1} пересекаются по одномерному распределению $\tilde{\Delta}_1$. Пусть $u \in \Delta_{n-1}$ -такое векторное поле, которое порождает как раз это $\tilde{\Delta}_1 : \tilde{\Delta}_1 = \tilde{\Delta}(u)$. Тогда $u = u^a X_a$, но, с другой стороны, $u = -(\lambda X + \mu Y)$. Отсюда следует, что

$$u^a + \lambda \xi^a + \mu \eta^a = 0, \quad \lambda \xi^n + \mu \eta^n = 0. \qquad (2)$$

Заметим, что $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$. Матрица A, составленная из коэффициентов при неизвестных u^a, λ, μ, имеет $\operatorname{rang} A = n$. Возьмем $X_n = X$, тогда из соотношений

(2) следует, что $u^a+\mu\eta^a=0$, $\lambda+\mu\eta^n=0$. Полагая $\mu=-1$, находим $u^a=\eta^a$, $\lambda=\eta^n$.

Если же $Y=tX$, то, учитывая $\nabla_Y X_a\in\Delta_{n-1}$ и $X\perp\Delta_{n-1}$, находим $\eta^i\gamma^n_{ai}=0$, $\xi^i g_{ai}=0$ $(\eta^i=t\xi^i)$.
Будем предполагать, что $\mathrm{rang}\,\|\gamma^n_{ai}\|=\mathrm{rang}\,\|g_{ai}\|=n$. Тогда

$$\xi^1:\xi^2:\ldots:\xi^n=G_1:(-1)G_2:\ldots:(-1)^{n-1}G_n, \qquad (G)$$

$$\eta^1:\eta^2:\ldots:\eta^n=\Gamma_1:(-1)\Gamma_2:\ldots:(-1)^{n-1}\Gamma_n, \qquad (\Gamma)$$

где G_i,Γ_i – миноры ($n-1$)-го порядка матрицы $G=\|g_{ai}\|$, $\Gamma=\|\gamma^n_{ai}\|$, соответственно, получающиеся после вычеркивания i-го столбца. Следовательно,

$$\Gamma_i=t\,G_i. \qquad (4)$$

Обратно, из (4) следует, что $Y=tX$.

3. Допустим, что интегральные кривые векторного поля u являются линиями кривизны относительно $\Delta(x)$, т.е. $\nabla_u X\in\Delta(u,X)$. Из этого соотношения следует:

$$\lambda_1u^c+\lambda_2\xi^c=u^a(\xi^c_{,a}+\xi^j\gamma^c_{ja}),\quad \lambda_2\xi^n=u^a(\xi^n_{,a}+\xi^j\gamma^n_{ja}). \qquad (5)$$

Возьмем $X_n=X$. Тогда из соотношения (5) получим $\lambda_1u^c=u^a\gamma^c_{na}$, $\lambda_2=u^a\gamma^n_{na}$ $(u^a=\eta^a)$. Отсюда

$$u^a\left(\gamma^b_{na}u^c-\gamma^c_{na}u^b\right)=0. \qquad (6)$$

Т е о р е м а 1. Если интегральные кривые 1-распределения $\Delta(u)=\Delta(X_n,Y)\cap\Delta_{n-1}$ являются линиями кривизны относительно 1-распределения $\Delta(X_n)$ $(X_n=X)$, ортогонального распределению Δ_{n-1}, то $\Delta(u)_x$ –общая образующая конусов (6).

Предположим, что X_a определяют направления линий кривизны относительно $\Delta(X_n)\,(X_n=X)$, т.е. $\nabla_{X_a}X_n\in\Delta(X_a,X_n)$. Тогда справедлива

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы интегральные кривые векторных полей X_a были линиями кривизны относительно $\Delta(X_n)$, $X_n\perp\Delta_{n-1}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:

$$\gamma^b_{na}=0,\quad g_{an}=0,\quad b\neq a\quad (a,b=1,2,\ldots,n-1).$$

4. Пусть V, W –линейно независимые векторные поля. Эти поля называются ∇-сопряженными, если $\nabla_V W$, $\nabla_W V\in\Delta(V,W)$ [1]. Одномерные распределения ∇-сопряжены, если ∇-сопряжены какие-либо векторные поля V и W, порождающие эти распределения.

Пусть X_n и X_a ∇-сопряжены, $a=1,2,\ldots,n-1$ и $X_n\perp\Delta(X_1,X_2,\ldots,X_{n-1})$. Тогда $\gamma^i_{an}=\gamma^i_{na}=0$, $g_{an}=0$, $i\neq a,n$. Отсюда следует

Т е о р е м а 3. Если векторные поля X_a и X_n ∇-сопряжены и ортогональны для каждого $a=1,2,\ldots,n-1$, то интегральные кривые векторных полей X_a являются линиями кривизны относительно 1-распределения $\Delta(X_n)$.

Список литературы

1. Б а з ы л е в В.Т. Сети на многообразиях.-В кн.: Труды геометрического семинара. Т.6. М., 1974, с.189-205.

2. Б а з ы л е в В.Т. О ∇-сопряженных сетях в пространстве аффинной связности.-Известия вузов. Математика, 1974, №5, с.25-30.

3. Громол Д., Клинберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М., 1971.

4. Н у р п е й с о в Ж. Геометрия гладких функций.-В кн.: Алгебра и теория чисел. Алма-Ата, 1978, с.51-57.